JOURNAL OF ALGEBRA 40, 75–96 (1976)

Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $PSL(2, p^f)$

R. BURKHARDT

Fachbereich Mathematic, Universität Mainz, Germany

Communicated by B. Huppert

Received November 11, 1974

EINLEITUNG

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $PSL(2, p^f)$ für alle Primzahlen q mit $q \mid |PSL(2, p^f)|$ zu berechnen. Die Tafel der komplexen Charaktere ist für diese Gruppen bekannt. Wir betrachten unsere Darstellungen stets über einem q-Zerfällungskörper L der Gruppen $PSL(2, p^f)$. Den Ring der ganzen Zahlen von L bezeichnen wir mit I, das maximale Ideal in I mit $\mathfrak{q}$ und den Restklassenkörper $I/\mathfrak{q}$ mit $\tilde{L}$.

Aus der Betrachtung der Konjugiertenklassen von q'-Elementen und ihrer Zentralisatoren erhält man die Anzahl der Blöcke zu den jeweils möglichen Defekten. Außer im Fall VIII existieren stets nur Blöcke von maximalem Defekt und solche vom Defekt 0.

In den Fällen I bis VI sind die q-Sylowgruppen zyklisch. Hier können wir einige Sätze von Dade verwenden. (Siehe dazu [1, §68]). Wir werden in diesen Fällen auch die Brauerbäume zu den einzelnen Blöcken aufzeichnen.

Im Fall VIII sind die q-Sylowgruppen Diedergruppen. In diesem Fall macht Brauer (Siehe [3]) eine Aussage über die Anzahl der irreduziblen komplexen Charaktere im 1-Block, der hier der einzige Block vom maximalen Defekt ist. Außer dem 1-Block treten noch Blöcke vom Defekt $a - 1$ und vom Defekt 0 auf, wobei q^a die Ordnung der q-Sylowgruppe ist.

In den Fällen VII und IX ist die Kenntnis der irred. $\tilde{L}[\mathfrak{G}]$ — Moduln notwendig. Man berechnet die Zerlegungsmatrizen für die kleinsten Gruppen ($f = 1, 2, \ldots$) und versucht daran die allgemeine Gesetzmäßigkeit abzulesen.

BEZEICHNUNGEN

L = q-Zerfällungskörper der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Bewertung w.

$I = \{x \mid x \in L, w(x) \geq 0\}$.

$\mathfrak{q} = \{x \mid x \in L, w(x) > 0\}$.

$\tilde{L}$ = der endliche Körper $I/\mathfrak{q}$.
$N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{U})$ = Normalisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$.
$C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{U})$ = Zentralisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$.
$\hat{\mathfrak{A}}$ = Charaktergruppe der abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$.
$A^{\mathfrak{G}}$ = Konjugiertenklasse des Elementes A in $\mathfrak{G}$.

I. $\mathfrak{G} = PSL(2, 2^f)$, $q \mid 2^f - 1$

Die Gruppen $PSL(2, 2^f)$ haben eine Partition $\{\mathfrak{P}^x, \mathfrak{U}^x, \mathfrak{V}^x \mid x \in PSL(2, 2^f)\}$. Dabei ist $\mathfrak{P}$ elementarabelsch der Ordnung 2^f, $\mathfrak{U}$ zyklisch der Ordnung $2^f - 1$, $\mathfrak{V}$ zyklisch der Ordnung $2^f + 1$. Für die Gruppenordnung gilt $|PSL(2, 2^f)| = (2^f - 1) \cdot 2^f \cdot (2^f + 1)$.

Charaktertafel der $PSL(2, 2^f)$

	E	$P \in \mathfrak{P} - \mathfrak{E}$	$U \in \mathfrak{U} - \mathfrak{E}$	$V \in \mathfrak{V} - \mathfrak{E}$
1	1	1	1	1
α	2^f	0	1	-1
$\eta^{\mathfrak{G}}$	$2^f + 1$	1	$\eta(U) + \bar{\eta}(U)$	0
γ^*	$2^f - 1$	-1	0	$-(\gamma(V) + \bar{\gamma}(V))$.

Dabei durchläuft η die $2^f - 2$ irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{U}$ mit $\eta \neq 1$ und γ die 2^f irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{V}$ mit $\gamma \neq 1$. Es gilt $\eta_1^{\mathfrak{G}} = \eta_2^{\mathfrak{G}}$ genau für $\eta_1 = \eta_2$ oder $\eta_1 = \bar{\eta}_2$ und $\gamma_1^* = \gamma_2^*$ genau für $\gamma_1 = \gamma_2$ oder $\gamma_1 = \bar{\gamma}_2$. Die dritte Zeile liefert also $\frac{1}{2}(2^f - 2) = 2^{f-1} - 1$ irreduzible Charaktere $\eta^{\mathfrak{G}}$, die vierte Zeile $\frac{1}{2} \cdot 2^f = 2^{f-1}$ Charaktere γ^*.

In unseren Fall sind die q-Sylowgruppen zyklisch, sodaß wir [1, Theorem 68.1] anwenden können. Setzen wir $\mathfrak{U} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{Q}$ mit $|\mathfrak{S}| = m$ und $|\mathfrak{Q}| = q^a$ wobei $(m, q) = 1$, so sieht man sofort: Die Anzahl der q'-Klassen von $PSL(2, 2^f)$ ist $(m - 1)/2 + (1/2)2^f + 2$. Da die Blöcke vom maximalen Defekt gleich der Anzahl der q'-Klassen $\{A^{\mathfrak{G}}\}$ mit $q^a \mid |C_{\mathfrak{G}}(A)|$ sind, gibt es $((m - 1)/2) + 1$ Blöcke vom maximalen Defekt. Aus der Charaktertafel liest man ab, daß es genau $\frac{1}{2} \cdot 2^f = 2^{f-1}$ Blöcke vom Defekt 0 gibt.

Sei $\mathfrak{D}$ Defektgruppe des 1-Blockes B_1. Dann ist $\mathfrak{D}$ eine q-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. Die Anzahl e der irreduziblen Brauercharaktere von B_1 ist ein Teiler von $|N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D})/C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D})|$. Wegen $|C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D})| = |\mathfrak{U}| = 2^f - 1$ und $|N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D})| = 2|\mathfrak{U}|$ gilt $e \mid 2$. Da der 1-Block B_1 nicht nur einen irreduziblen Brauercharakter haben kann folgt $e = 2$. Wir sehen damit auch, daß außer den Blöcken von maximalem Defekt und denen vom Defekt 0 keine weiteren mehr existieren. Mit [1, Theorem 68.1] folgt nun daß im 1-Block B_1 genau $2 + (q^a - 1)/2$ irreduzible komplexe Charaktere liegen. In allen anderen Blöcken vom maximalen Defekt liegen 1 irreduzibler Brauercharakter und q^a irreduzible komplexe Charaktere, wie man aus der Anzahl der Blöcke vom maximalen Defekt und der Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere ersieht.

Wir wollen zuerst die irreduziblen komplexen Charaktere aus dem Block B_1 bestimmen. Wir benutzen dabei, daß nach [1, Theorem 68.1] nur die Zerlegungszahlen 0 und 1 auftreten. Um herauszufinden, ob zwei irreduzible Charaktere zum gleichen Block gehören, verwenden wir folgendes Kriterium:

Zwei irreduzible komplexe Charaktere χ und χ' gehören genau dann zum selben Block, wenn gilt

$$|G^{\mathfrak{G}}| \frac{\chi(G)}{\chi(E)} \equiv |G^{\mathfrak{G}}| \frac{\chi'(G)}{\chi'(E)} \quad (\mathfrak{q}),$$

für alle q'-Elemente G aus $\mathfrak{G}$.

Sei $P \in \mathfrak{P}$.

$$|P^{\mathfrak{G}}| \frac{\alpha(P)}{\alpha(E)} = 0; \qquad |P^{\mathfrak{G}}| \frac{1(P)}{1(E)} = (2^f + 1)(2^f - 1).$$

Also gilt

$$|P^{\mathfrak{G}}| \frac{\alpha(P)}{\alpha(E)} \equiv |P^{\mathfrak{G}}| \frac{1(P)}{1(E)} \quad (\mathfrak{q}).$$

Sei $V \in \mathfrak{V}$.

$$|V^{\mathfrak{G}}| \frac{\alpha(V)}{\alpha(E)} = -(2^f - 1); \qquad |V^{\mathfrak{G}}| \frac{1(V)}{1(E)} = 2^f \cdot (2^f - 1).$$

Also

$$|V^{\mathfrak{G}}| \frac{\alpha(V)}{\alpha(E)} \equiv |V^{\mathfrak{G}}| \frac{1(V)}{1(E)} \quad (\mathfrak{q}).$$

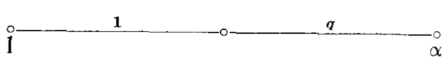
Sei $U \in \mathfrak{S}$.

$$|U^{\mathfrak{G}}| \frac{\alpha(U)}{\alpha(E)} = 2^f + 1; \qquad |U^{\mathfrak{G}}| \frac{1(U)}{1(E)} = 2^f \cdot (2^f + 1).$$

Also

$$|U^{\mathfrak{G}}| \frac{\alpha(U)}{\alpha(E)} \equiv |U^{\mathfrak{G}}| \frac{1(U)}{1(E)} \quad (\mathfrak{q}).$$

Damit haben wir gezeigt, daß α im 1-Block B_1 liegt. Der Brauerbaum von B_1 hat somit folgende Gestalt



wobei in der Mitte noch $\frac{1}{2}(q^a - 1)$ Charaktere $\eta^{\mathfrak{G}}$ sitzen. Wie oben sieht man, daß gilt

$$|P^{\mathfrak{G}}| \frac{\eta^{\mathfrak{G}}(P)}{\eta^{\mathfrak{G}}(E)} \equiv |P^{\mathfrak{G}}| \frac{1(P)}{1(E)} \quad (\mathfrak{q}), \qquad \text{für alle } P \in \mathfrak{P},$$

$$|V^{\mathfrak{G}}| \frac{\eta^{\mathfrak{G}}(V)}{\eta^{\mathfrak{G}}(E)} \equiv |V^{\mathfrak{G}}| \frac{1(V)}{1(E)} \quad (\mathfrak{q}), \qquad \text{für alle } V \in \mathfrak{V},$$

für alle $\eta^{\mathfrak{G}}$.

Die entsprechende Kongruenz mit $U \in \mathfrak{S}$ entscheidet also, welche $\eta^{\mathfrak{G}}$ im 1-Block B_1 liegen.

Wegen $\mathfrak{U} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{Q}$ kann man jeden Charakter η von $\mathfrak{U}$ schreiben als $\eta = \chi \cdot \psi$ mit $\chi \in \hat{\mathfrak{Q}}$ und $\psi \in \hat{\mathfrak{S}}$.

Wir betrachten die irreduziblen Charaktere $\eta_i = \chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}}$ mit $1_{\mathfrak{Q}} \neq \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}}$ und $1_{\mathfrak{S}}$ der triviale Charakter von $\mathfrak{S}$. Für alle Elemente $A \in \mathfrak{S}$ gilt $\eta_i(A) = 1$. Sei U ein q'-Element aus $\mathfrak{U}$, also $U \in \mathfrak{S}$. Dann gilt

$$|U^{\mathfrak{G}}| \frac{\eta_i^{\mathfrak{G}}(U)}{\eta_i^{\mathfrak{G}}(E)} = 2^{f+1}; \qquad |U^{\mathfrak{G}}| \frac{1(U)}{1(E)} = 2^f \cdot (2^f + 1)$$

Damit gilt

$$|U^{\mathfrak{G}}| \frac{\eta_i^{\mathfrak{G}}(U)}{\eta_i^{\mathfrak{G}}(E)} \equiv |U^{\mathfrak{G}}| \frac{1(U)}{1(E)} \quad (\mathfrak{q}).$$

Also liegen alle $\eta_i^{\mathfrak{G}}$ im 1-Block B_1. Da $\eta_i^{\mathfrak{G}} = \bar{\eta}_i^{\mathfrak{G}}$ und $\eta_i \neq \bar{\eta}_i$ für alle i gilt, erhalten wir gerade alle restlichen Charaktere aus dem 1-Block B_1, nämlich $\frac{1}{2}(|\mathfrak{Q}| - 1) = \frac{1}{2}(q^a - 1)$ Stück. Sei nun ψ_j ein von 1 verschiedener irreduzibler Charakter von $\mathfrak{S}$. Die Charaktere $(\chi_i \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}}$ mit $\chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}}$ stimmen auf den q'-Elementen von $\mathfrak{U}$ überein, und liegen somit alle in einem Block. Wegen $\overline{\chi_i \cdot \psi_j} \notin \{\chi_e \cdot \psi_j \mid \chi_e \in \hat{\mathfrak{Q}}\}$ gilt $(\chi_i \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}} \neq (\chi_{i'} \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}}$ für $i \neq i'$. Wir erhalten also $|\mathfrak{Q}| = q^a$ Charaktere, die im selben Block liegen. Da kein Block mehr als q^a Charaktere enthält, sind das gerade sämtliche Charaktere dieses Blockes.

Damit ist die Gestalt des Brauerbaumes der anderen Blöcke von maximalem Defekt bestimmt:

$$\begin{tikzcd} \underset{(\chi_1 \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}}}{\circ} \arrow[rr, dash, "2^f+1"] & & \underset{\{(\chi_k \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}} \mid k \neq 1\}.}{\circ} \end{tikzcd}$$

Die Charaktere $(\chi_i \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}}$ mit $\psi_j \neq 1$ bleiben demnach irreduzibel wohingegen die Charaktere $(\chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{G}}$ in zwei irreduzible Brauercharaktere zerfallen.

Die Zerlegungsmatrizen zu den Blöcken vom maximalen Defekt sehen also folgendermaßen aus:

$$\text{Für den 1-Block: } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l}\text{Für die anderen Blöcke} \\ \text{vom max. Defekt:}\end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

II. $\mathfrak{g} = PSL(2, 2^f), q \mid 2^f + 1$

Wir zerlegen $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{Q}$ mit $|\mathfrak{Q}| = q^a$, $|\mathfrak{S}| = m$, $(q, m) = 1$. So wie oben erhalten wir dann: Anzahl der q'-Klassen, $((m - 1)/2) + (1/2)(2^f - 2) + 2$; Anzahl der Blöcke vom maximalen Defekt, $((m - 1)/2) + 1$; Anzahl der Blöcke vom Defekt 0, $(1/2)(2^f - 2)$.

Wiederum hat der 1-Block B_1 zwei irreduzible Brauercharaktere und $2 + (1/2)(q^a - 1)$ irreduzible komplexe Charaktere. Alle anderen Blöcke vom maximalen Defekt haben einen irreduziblen Brauercharakter und q^a irreduzible komplexe Charaktere. Ganz analog wie oben ergeben sich folgende Brauerbäume:

Zum 1-Block B_1

$$\underset{1}{\circ} \overset{1}{\rule[0.5ex]{6em}{0.4pt}} \underset{\alpha}{\circ} \overset{2^f-1}{\rule[0.5ex]{6em}{0.4pt}} \underset{(\chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}})^*}{\circ}$$

Zu den anderen Blöcken vom maximalen Defekt

$$\underset{(\chi_1 \cdot \psi_j)^*}{\circ} \overset{2^f-1}{\rule[0.5ex]{12em}{0.4pt}} \underset{\{(\chi_k \cdot \psi_j)^* \mid k \neq 1, \psi_j \neq 1_{\mathfrak{S}} \text{ fest}\}}{\circ}$$

Zerlegungsmatrizen

$$\text{Zu } B_1: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l}\text{Zu den anderen Blöcken} \\ \text{vom max. Defekt:}\end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

III. $\mathfrak{G} = PSL(2, p^f), p^f \equiv 1(4), 2 \neq q \mid p^f - 1$

Die Gruppen $PSL(2, p^f)$ haben eine Partition $\{\mathfrak{P}^x, \mathfrak{U}^x, \mathfrak{B}^x \mid x \in \mathfrak{G}\}$ mit: $\mathfrak{P}$ elementarabelsch der Ordnung p^f, $\mathfrak{U}$ zyklisch der Ordnung $\frac{1}{2}(p^f - 1)$, $\mathfrak{B}$ zyklisch von der Ordnung $\frac{1}{2}(p^f + 1)$. Die q-Sylowgruppen sind zyklisch. Für die Gruppenordnung gilt $|PSL(2, p^f)| = \frac{1}{2}(p^f - 1) \cdot p^f \cdot (p^f + 1)$.

Charaktertafel der $PSL(2, p^f)$ für $p^f \equiv 1(4)$

	E	P_1	P_2	$U \in \mathfrak{U} - \mathfrak{E}$	$V \in \mathfrak{V} - \mathfrak{E}$
1	1	1	1	1	1
α	p^f	0	0	1	-1
$\eta^{\mathfrak{G}}$	$p^f + 1$	1	1	$\eta(U) + \bar{\eta}(U)$	0
γ_1	$\frac{1}{2}(p^f + 1)$	$\frac{1}{2}(1 + (p^f)^{1/2})$	$\frac{1}{2}(1 - (p^f)^{1/2})$	$\lambda(U)$	0
γ_2	$\frac{1}{2}(p^f + 1)$	$\frac{1}{2}(1 - (p^f)^{1/2})$	$\frac{1}{2}(1 + (p^f)^{1/2})$	$\lambda(U)$	0
δ^*	$p^f - 1$	-1	-1	0	$-(\delta(V) + \bar{\delta}(V))$

Dabei durchläuft η die irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{U}$ mit $\eta \neq \bar{\eta}$, die dritte Zeile liefert also $\frac{1}{2}(|\mathfrak{U}| - 2) = \frac{1}{4}(p^f - 5)$ verschiedene Charaktere. Es durchläuft δ die von 1 verschiedenen Charaktere von $\mathfrak{V}$, die sechste Zeile liefert also $\frac{1}{2}(|\mathfrak{V}| - 1) = \frac{1}{4}(p^f - 1)$ verschiedene Charaktere. In der vierten und fünften Zeile sei λ der Charakter von $\mathfrak{U}$ mit $\lambda \neq 1 = \lambda^2$.

Wir setzen wieder $\mathfrak{U} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{Q}$ mit $|\mathfrak{Q}| = q^a$ und $|\mathfrak{S}| = m$, $(m, q) = 1$. Dann folgt: Anzahl der q'-Klassen, $3 + (m/2) + (1/4)(p^f - 1)$; Anzahl der Blöcke vom maximalen Defekt, $(m/2) + 1$; Anzahl der Blöcke vom Defekt 0, $(1/4)(p^f - 1)$.

Da für zwei verschiedene q-Sylowgruppen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ stets $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{E}$ gilt, gibt es keine weiteren Blöcke. Wegen $|N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{F})/C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{F})| = 2$ für jede q-Sylowgruppe $\mathfrak{F}$, folgt, daß die Blöcke vom maximalen Defekt entweder einen oder zwei irreduzible Brauercharaktere enthalten. Also gibt es außer dem 1-Block B_1 noch einen Block B_2 von maximalem Defekt, der zwei irreduzible Brauercharaktere enthält. Alle anderen Blöcke haben nur einen. Wir bestimmen nun zuerst wieder die irreduziblen Charaktere die in B_1 liegen. Man rechnet leicht nach, daß

$$|G^{\mathfrak{G}}| \frac{\alpha(G)}{\alpha(E)} \equiv |G^{\mathfrak{G}}| \frac{1(G)}{1(E)} \quad (\mathfrak{q})$$

für alle q'-Elemente G gilt. Also liegt α im 1-Block B_1. Damit hat der Brauerbaum von B_1 folgende Gestalt:

$$\underset{1}{\circ} \xrightarrow[]{1} \circ \xrightarrow[]{p^f} \underset{\alpha}{\circ}$$

In der Mitte liegen noch $\frac{1}{2}(q^a - 1)$ Charaktere $\eta^{\mathfrak{G}}$. Ist $\eta \in \hat{\mathfrak{U}}$, so gilt $\eta = \chi \cdot \psi$ mit $\chi \in \hat{\mathfrak{Q}}$ und $\psi \in \hat{\mathfrak{S}}$. Man rechnet nun wieder sofort nach, daß die $(1/2)(q^a - 1)$ Charaktere $(\chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{G}}$ mit $1 \neq \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}}$ im 1-Block liegen, also gerade die noch fehlenden Charaktere sind. Für den Brauerbaum von B_2 muß gelten:

$$\underset{\gamma_1}{\circ} \xrightarrow[]{\frac{1}{2}(p^f+1)} \circ \xrightarrow[]{\frac{1}{2}(p^f+1)} \underset{\gamma_2}{\circ}$$

In der Mitte liegen noch $\frac{1}{2}(q^a - 1)$ Charaktere $\eta^{\mathfrak{G}}$. Sei $\psi \in \hat{\mathfrak{S}}$ mit $\psi \neq 1 = \psi^2$. Es ist klar, daß die $\frac{1}{2}(q^a - 1)$ Charaktere $\{(\chi_i \cdot \psi)^{\mathfrak{G}} \mid \chi_i \neq 1_{\mathfrak{Q}}\}$ im selben Block liegen. Ebenfalls liegen die Charaktere $\{(\chi_i \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}} \mid \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}}\}$ mit $\psi_j \in \hat{\mathfrak{S}} - \{1, \psi\}$ im gleichen Block. Das sind wegen $(\chi_i \cdot \psi_j) \notin \{(\chi_k \cdot \psi_j) \mid \chi_k \in \hat{\mathfrak{Q}}\}, \psi_j \in \hat{\mathfrak{S}} - \{1, \psi\}$ genau q^a Stück. Die Anzahl dieser Mengen ist gerade $m/2$. Da neben dem 1-Block B_1 aber genau noch $m/2$ weitere Blöcke aufzufüllen sind, ist die Aufteilung der Charaktere in die Blöcke geklärt.

Für die Brauerbäume gilt: Für B_1,

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \overset{1}{\rule{4em}{0.4pt}} & \circ & \overset{p^f}{\rule{4em}{0.4pt}} & \circ \\ 1 & & (\chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{G}} & & \alpha \\ & & 1 \neq \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}} & & \end{array}$$

Für B_2,

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \rule{4em}{0.4pt} & \circ & \rule{4em}{0.4pt} & \circ \\ \gamma_1 & & (\chi_i \cdot \psi)^{\mathfrak{G}} & & \gamma_2 \\ & & 1 \neq \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}} & & \end{array}$$

Für die anderen Blöcke vom maximalen Defekt,

$$\begin{array}{ccc} \circ & \rule{8em}{0.4pt} & \circ \\ (\chi_1 \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}} & & \{(\chi_i \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}} \mid \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}} - \{\chi_1\}\} \end{array}$$

mit $\psi_j \in \hat{\mathfrak{S}} - \{1, \psi\}$ fest.

Wir erhalten die Zerlegungsmatrizen:

$$\text{Für } B_1, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{Für } B_2, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die anderen Blöcke vom max. Defekt,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

IV. $\mathfrak{G} = PSL(2, p^f), p^f \equiv 1(4), 2 \neq q \mid p^f + 1$

Setze: $\mathfrak{B} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{Q}$, $|\mathfrak{Q}| = q^a$, $|\mathfrak{S}| = m$, $(m, q) = 1$. Anzahl der q'-Klassen, $3 + (1/4)(p^f - 1) + (m - 1)/2$; Anzahl der Blöcke vom maximalen Defekt, $1 + (m - 1)/2$; Anzahl der Blöcke vom Defekt 0, $(1/4)(p^f - 1) + 1$.

Also ist der 1-Block B_1 der einzige Block mit zwei irreduziblen Brauercharakteren. Alle anderen haben nur einen. Analog wie oben erhalten wir folgendes Ergebnis:

Für B_1, Brauerbaum:

$$\underset{1}{\circ}\text{————————}\underset{\alpha}{\circ}\text{————————}\underset{\{(\chi_i\cdot 1_{\mathfrak{S}})^* \mid \chi_i\in\hat{\mathfrak{Q}}-\{1\}\}}{\circ}$$

Zerlegungsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die anderen Blöcke vom maximalen Defekt, Brauerbaum:

$$\underset{(\chi_1\cdot\psi_j)^*}{\circ}\text{————————————————}\underset{\{(\chi_i\cdot\psi_j)^* \mid \chi_i\neq\chi_1,\ 1\neq\psi_j \text{ fest}\}}{\circ}$$

Zerlegungsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

V. $\mathfrak{G} = PSL(2, p^f),\ p^f \equiv -1(4),\ 2 \neq q \mid p^f - 1$

Charaktertafel der $PSL(2, p^f)$ für $p^f \equiv -1(4)$

	E	P_1	P_2	$U \in \mathfrak{U} - \mathfrak{E}$	$V \in \mathfrak{V} - \mathfrak{E}$
1	1	1	1	1	1
α	p^f	0	0	1	-1
$\eta^{\mathfrak{G}}$	p^f+1	1	1	$\eta(U)+\bar{\eta}(U)$	0
γ_1	$\frac{1}{2}(p^f-1)$	$\frac{1}{2}(-1+(-p^f)^{1/2})$	$\frac{1}{2}(-1-(-p^f)^{1/2})$	0	$-\lambda(V)$
γ_2	$\frac{1}{2}(p^f-1)$	$\frac{1}{2}(-1-(-p^f)^{1/2})$	$\frac{1}{2}(-1+(-p^f)^{1/2})$	0	$-\lambda(V)$
δ^*	p^f-1	-1	-1	0	$-(\delta(V)+\bar{\delta}(V))$.

Dabei ist λ der Charakter der Ordnung 2 von $\mathfrak{V}$. In der dritten Zeile treten die von 1 verschiedenen Charaktere von $\mathfrak{U}$ auf, das liefert $\frac{1}{2}(|\mathfrak{U}| - 1) = \frac{1}{4}(p^f - 3)$ verschiedene Charaktere $\eta^{\mathfrak{G}}$. In der sechsten Zeile treten alle

Charaktere δ von $\mathfrak{B}$ mit $\delta \neq \bar{\delta}$ auf, das liefert genau $\frac{1}{2}(|\mathfrak{B}| - 2) = \frac{1}{4}(p^f - 3)$ verschiedene Charaktere δ^*.

Setze: $\mathfrak{U} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{Q}$, $|\mathfrak{Q}| = q^a$, $|\mathfrak{S}| = m$, $(m, q) = 1$. Dann gilt: Anzahl der q'-Klassen, $3 + (1/4)(p^f + 1) + (m - 1)/2$; Anzahl der Blöcke vom maxmalen Defekt, $((m - 1)/2) + 1$; Anzahl der Blöcke vom Defekt 0, $(1/4)(p^f + 1) + 1$.

Das bedeutet wieder, daß nur der 1-Block zwei irreduzible Brauercharaktere enthält, alle anderen Blöcke nur einen.

Man rechnet wieder nach, daß α in B_1 liegt. Weiter folgt daß die Charaktere $\{(\chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{G}} \mid \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}} - \{1\}\}$ in einem Block liegen. Ebenfalls liegen die Charaktere $\{(\chi_i \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}} \mid \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}}\}$ für $\psi_j \neq 1_{\mathfrak{S}}$ in einem Block. Das sind $((m - 1)/2) + 1$ Mengen, und genauso viele Blöcke von maximalem Defekt sind zu füllen. Mit $|\{(\chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{G}} \mid \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}} - \{1\}\}| = (1/2)(q^a - 1)$ und $|\{(\chi_i \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}} \mid \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}}\}| = q^a$ für $\psi_j \neq 1_{\mathfrak{S}}$ folgt, daß die Charaktere $(\chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{G}}$ im 1-Block liegen, und die anderen Mengen jeweils gerade die komplexen irreduziblen Charaktere eines Blockes von maximalem Defekt sind.

Wir erhalten folgendes Ergebnis. Zu B_1, Brauerbaum:

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] \underset{1}{\circ} \arrow[r, "1"] & \underset{\substack{(\chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{G}} \\ \chi_i \neq 1_{\mathfrak{Q}}}}{\circ} \arrow[r, "p^f"] & \underset{\alpha}{\circ} \end{tikzcd}$$

Zerlegungsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die anderen Blöcke vom maximalen Defekt, Brauerbaum.

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] \underset{(\chi_1 \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}}}{\circ} \arrow[r, "p^f+1"] & \underset{\{(\chi_i \cdot \psi_j)^{\mathfrak{G}} \mid \chi_i \neq \chi_1\}}{\circ} \end{tikzcd}$$

Zerlegungsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

VI. $\mathfrak{G} = PSL(2, p^f), p^f \equiv -1(4), 2 \neq q \mid p^f + 1$

Setze: $\mathfrak{V} = \mathfrak{S} \times \mathfrak{Q}$, $|\mathfrak{Q}| = q^a$, $|\mathfrak{S}| = m$, $(m, q) = 1$. Dann gilt: Anzahl der q'-Klassen, $3 + (1/4)(p^f - 3) + (m/2)$; Anzahl der Blöcke vom maximalen Defekt, $(m/2) + 1$; Anzahl der Blöcke vom Defekt 0, $(1/4)(p^f - 3)$.

Also gibt es neben dem 1-Block B_1 noch einen Block B_2 von maximalem Defekt, der zwei irreduzible Brauercharaktere besitzt. Sei $1_{\mathfrak{S}}$ der triviale Charakter von $\mathfrak{S}$ und ψ der Charakter von $\mathfrak{S}$ mit $\psi \neq 1 = \psi^2$. Es ergibt sich folgendes Resultat. Zu B_1, Brauerbaum:

$$\underset{1}{\circ}\overset{1}{\text{———————}}\underset{\alpha}{\circ}\overset{p^f}{\text{———————}}\underset{\{(\chi_i \cdot 1_{\mathfrak{S}})^* \mid \chi_i \in \mathfrak{Q} - \{1\}\}}{\circ}$$

Zerlegungsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zu B_2, Brauerbaum:

$$\underset{\gamma_1}{\circ}\text{———————}\underset{\substack{(\chi_i \cdot \psi)^* \\ \chi_i \in \hat{\mathfrak{Q}}}}{\circ}\text{———————}\underset{\gamma_2}{\circ}$$

Zerlegungsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die anderen Blöcke von maximalem Defekt, Brauerbaum:

$$\underset{(\chi_1 \cdot \psi_j)^*}{\circ}\text{——————————}\underset{\{(\chi_i \cdot \psi_j)^* \mid \chi_i \neq \chi_1\},}{\circ}$$

Zerlegungsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Damit haben wir die Fälle behandelt, in denen die q-Sylowgruppen zyklisch sind und wir [1, Theorem 68.1] anwenden können.

Es bleiben noch die folgenden drei Fälle: (VII), $PSL(2, 2^f)$, $q = 2$; (VIII), $PSL(2, p^f)$, $q = 2$; (IX), $PSL(2, p^f)$, $q = p$.

VII. $\mathfrak{G} = PSL(2, 2^f), q = 2$

Wir wollen zuerst die Frage nach den irreduziblen $\tilde{L}[\mathfrak{G}]$-Moduln klären. Wir zitieren dazu folgenden Satz (Siehe [4]):

SATZ 7.1. *Sei V der natürliche Modul zu $\mathfrak{G}$, der ein Vektorraum der Dimension 2 über $GF(2^f)$ ist. Seien $V = V_1, \ldots, V_f$ die zu V über $GF(2)$ algebraisch konjugierten Moduln. Dann sind die Tensorprodukte $V_{i_1} \otimes \cdots \otimes V_{i_\tau}$ mit $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\tau \leqslant f$ bis auf Isomorphie die sämtlichen irreduziblen $\tilde{L}[\mathfrak{G}]$-Moduln.*

7.2 *Bezeichnungen.* Sei $I = \{i_1, \ldots, i_\tau\} \subseteq \{1, \ldots, f\} = F$. Wir bezeichnen im Folgenden den Modul $V_{i_1} \otimes \cdots \otimes V_{i_\tau}$ mit V_I und den Brauercharakter von V_I mit β_I. Für $I \in \mathfrak{F} := \{I \mid I \subseteq F\}$ definieren wir die Menge

$$\mathfrak{A}(I) := \left\{ 0 \leqslant \sum_{k=1}^{\tau} a_k 2^{i_k - 1} \mid a_k \in \{1, -1\} \right\}$$

wobei $I = \{i_1, \ldots, i_\tau\}$.

Mit I' bezeichnen wir das Komplement von I in F. Ist $I = \varnothing$, so sei $\mathfrak{A}(I) = \{0\}$. Es sei $\beta_{\{1\}|\mathfrak{U}} = \eta + \eta^{-1}$ mit $\langle \eta \rangle = \hat{\mathfrak{U}}$ und $\beta_{\{1\}|\mathfrak{B}} = \gamma + \gamma^{-1}$ mit $\langle \gamma \rangle = \hat{\mathfrak{B}}$. Wir schreiben dann die $\eta^{\mathfrak{G}}$ als $\eta^{i\mathfrak{G}}$ für $1 \leqslant i \leqslant 2^{f-1} - 1$ und die γ^* als γ^{i*} für $1 \leqslant i \leqslant 2^{f-1}$.

SATZ 7.3. *Es treten nur die Zerlegungszahlen* 0 *und* 1 *auf.*

Beweis. Wir brauchen die Aussage natürlich nur für die Charaktere $\eta^{\mathfrak{G}}$ und γ^* zu beweisen. Sei $\eta^{\mathfrak{G}} = \sum_{I \in \mathfrak{C}} d_I \beta_I$ die Zerlegung von $\eta^{\mathfrak{G}}$ in irreduzible Brauercharaktere mit $\mathfrak{C} = \{I \mid I \subseteq F, d_I > 0\}$. Die β_I mit $d_I = 0$ seien nicht aufgeführt. Schränken wir β_I auf die $2'$-Gruppe $\mathfrak{B}$ ein, so folgt $\beta_{I|\mathfrak{B}} = \sum_{j=1}^{2^f+1} x_{jI} \gamma_j$ wobei γ_j die Charaktere von $\mathfrak{B}$ sind. Dann gilt

$$\rho_{\mathfrak{B}} = \eta^{\mathfrak{G}}|_{\mathfrak{B}} = \sum_{I \in \mathfrak{C}} d_I \left(\sum_{j=1}^{2^f+1} x_{jI} \gamma_j \right) = \sum_{j=1}^{2^f+1} \left(\sum_{I \in \mathfrak{C}} d_I x_{jI} \right) \gamma_j$$

Es folgt

$$\sum_{I \in \mathfrak{C}} d_I x_{jI} = 1, \qquad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, 2^f + 1.$$

Wegen $d_I > 0$ und $x_{jI} \geqslant 0$ gibt es für alle j genau ein I_j mit $x_{jI_j} \neq 0$. Es folgt $x_{jI_j} = d_{I_j} = 1$. Sei I_0 beliebig aus $\mathfrak{C}$. Dann gibt es ein j, mit $x_{jI_0} \neq 0$. Es folgt $I_0 = I_j$ und $d_{I_0} = d_{I_j} = 1$. Wir haben damit gezeigt, daß die Zerlegungszahlen der $\eta^{\mathfrak{G}}$ nur die Werte 0 und 1 annehmen. Mit Hilfe von $\gamma^* |_{\mathfrak{U}} = \rho_{\mathfrak{U}}$ beweist man dasselbe für die Zerlegungszahlen der γ^*. Q.E.D.

Den folgenden Hilfssatz geben wir ohne Beweis an, da dieser rein kombinatorischer Art ist.

HILFSSATZ 7.4. (a) *Für* $0 \leqslant j \leqslant 2^f - 1$ *gilt*

$$\{k \mid k \in \mathfrak{A}(I), j \in \mathfrak{A}(I'), I \in \mathfrak{F}\} = \{k \mid k \not\equiv j\,(2), 0 \leqslant k \leqslant 2^f - 1 - j\}.$$

(b) *Für* $0 \leqslant j \leqslant 2^f - 1$ *gilt*

$$\{k \mid k \in \mathfrak{A}(I), 2^f - 1 - j \in \mathfrak{A}(I'), I \in \mathfrak{F}\} = \{k \mid k \equiv j\,(2), 0 \leqslant k \leqslant j\}.$$

HAUPTSATZ 7.5. *Sei* $\eta^{j\mathfrak{G}} = 1 + \sum_{\phi \neq I \in \mathfrak{F}} d_{jI}\beta_I$ *die Zerlegung von* $\eta^{j\mathfrak{G}}$ *in irreduzible Brauercharaktere, so gilt*

$$\begin{aligned} d_{jI} &= 1, \qquad \textit{für} \quad \{j, 2^f - 1 - j\} \cap \mathfrak{A}(I') \neq \varnothing \\ &= 0, \qquad \textit{sonst.} \end{aligned}$$

Wir beweisen diesen Hauptsatz über einige Hilfssätze.

DEFINITION 7.6. Für $1 \leqslant j \leqslant 2^{f-1} - 1$ setzen wir

$$K(\eta^{j\mathfrak{G}}) = 1 + \sum_{\substack{\phi \neq I \\ I' \in \mathfrak{L}(j)}} \beta_I$$

mit $\mathfrak{L}(j) = \{I \mid I \subseteq F, j \text{ oder } 2^f - 1 - j \in \mathfrak{A}(I)\}$.

HILFSSATZ 7.7. $K(\eta^{j\mathfrak{G}}) |_{\mathfrak{U}} = \eta^{j\mathfrak{G}} |_{\mathfrak{U}} = \rho_{\mathfrak{U}} + \eta^j + \eta^{-j}$.

Beweis. Für $\phi \neq I$ gilt $\beta_I|_{\mathfrak{U}} = \sum_{k \in \mathfrak{A}(I)} (\eta^k + \eta^{-k})$ mit $\langle \eta \rangle = \hat{\mathfrak{U}}$.

$$\begin{aligned} K(\eta^{j\mathfrak{G}}) |_{\mathfrak{U}} &= 1 + \sum_{\substack{\phi \neq I \\ I' \in \mathfrak{L}(j)}} \beta_I |_{\mathfrak{U}} = 1 + \sum_{\substack{\phi \neq I \\ I' \in \mathfrak{L}(j)}} \sum_{k \in \mathfrak{A}(I)} (\eta^k + \eta^{-k}) \\ &= 1 + \sum_{\substack{0 \neq k \\ k \not\equiv j, k \leqslant 2^f - 1 - j \\ k \equiv j, k \leqslant j}} (\eta^k + \eta^{-k}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{2^f - 2} a_k (\eta^k + \eta^{-k}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &= 1 \text{ für } k \not\equiv j, \quad && k \leqslant 2^f - 1 - j, \\ &= 1 \text{ für } k \equiv j, && k \leqslant j, \\ &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Sei

$$k \in \{1, \ldots, 2^f - 2\}, \qquad k \notin \{j, 2^f - 1 - j\}.$$

Fall 1. $k \equiv j(2)$. Ist $k < j$, so $a_k = 1$ und $a_{2^f-1-k} = 0$ wegen

$$2^f - 1 - k \not\equiv j(2) \qquad \text{und} \qquad 2^f - 1 - k > 2^f - 1 - j.$$

Ist $k > j$, so $a_k = 0$ und $a_{2^f-1-k} = 1$ wegen

$$2^f - 1 - k \not\equiv j(2) \qquad \text{und} \qquad 2^f - 1 - k < 2^f - 1 - j.$$

Fall 2. $k \not\equiv j(2)$. Ist $k < 2^f - 1 - j$, so $a_k = 1$ und $a_{2^f-1-k} = 0$ wegen

$$2^f - 1 - k \equiv j(2) \qquad \text{und} \qquad 2^f - 1 - k > j.$$

Ist $k > 2^f - 1 - j$, so $a_k = 0$ und $a_{2^f-1-k} = 1$ wegen

$$2^f - 1 - k \equiv j(2) \qquad \text{und} \qquad 2^f - 1 - k < j.$$

Außerdem gilt $a_j = 1 = a_{2^f-1-j}$. Es folgt:

$$1 + \sum_{k=1}^{2^f-2} a_k(\eta^k + \eta^{-k}) = \rho_{\mathfrak{U}} + \eta^j + \eta^{-j}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

HILFSSATZ 7.8. $K(\eta^{j\mathfrak{G}}) |_{\mathfrak{B}} = \eta^{j\mathfrak{G}} |_{\mathfrak{B}} = \rho_{\mathfrak{B}}$.

Der Beweis dieses Hilfssatzes verläuft analog dem Beweis des vorigen Hilfssatzes.

Aus den Hilfssätzen 7.7 und 7.8 folgt Hauptsatz 7.5. Genauso wie Hauptsatz 7.5 beweist man den folgenden Hauptsatz 7.9, der die Zerlegungszahlen der γ^{j*} beschreibt.

HAUPTSATZ 7.9. *Sei* $\gamma^{j*} = 1 + \sum_{\phi \neq I \in \mathfrak{F}} d_{jI}\beta_I$ *die Zerlegung von* γ^{j*} *in irreduzible Brauercharaktere, so gilt*

$$\begin{aligned} d_{jI} &= 1 \textit{ für } \{j, 2^f + 1 - j\} \cap \mathfrak{A}(I') \neq \varnothing \\ &= 0 \textit{ sonst.} \end{aligned}$$

Als Beispiel diene die Zerlegungsmatrix der Gruppe $PSL(2, 8)$:

	1	$\beta_{\{1\}}$	$\beta_{\{2\}}$	$\beta_{\{3\}}$	$\beta_{\{12\}}$	$\beta_{\{13\}}$	$\beta_{\{23\}}$	$\beta_{\{123\}}$
1	1							
$\eta^{1\mathfrak{G}}$	1	1		1			1	
$\eta^{2\mathfrak{G}}$	1	1	1			1		
$\eta^{3\mathfrak{G}}$	1		1	1	1			
γ^{1*}	1			1			1	
γ^{2*}	1	1				1		
γ^{3*}	1	1	1	1				
γ^{4*}	1		1		1			
α								1

VIII. $\mathfrak{G} = PSL(2, p^f), q = 2$

(a) Sei $p^f \equiv 1(4)$. Wir setzen $\mathfrak{U} = \mathfrak{Q} \times \mathfrak{S}$ mit $|\mathfrak{Q}| = 2^{a-1}$ und $|\mathfrak{S}| = m$ $2 \nmid m$. Es folgt: Anzahl der $2'$-Klassen, $3 + \frac{1}{4}(p^f - 1) + \frac{1}{2}(m - 1)$; Anzahl der Blöcke vom maximalen Defekt, 1; Anzahl der Blöcke vom Defekt 0, $\frac{1}{4}(p^f - 1)$.

Durch nachrechnen der Kongruenzen sieht man, daß die Charaktere α, γ_1, und γ_2 im 1-Block liegen. Für $\eta \in \hat{\mathfrak{U}}$ setzen wir $\eta = \chi \cdot \psi$ mit $\chi \in \hat{\mathfrak{Q}}$ und $\psi \in \hat{\mathfrak{S}}$. Wiederum mit Hilfe der Kongruenzen sieht man, daß die Charaktere $(\chi 1_{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{G}}$ im 1-Block liegen. Dabei sei $1 \neq \chi \neq \lambda$. Angenommen $\eta^{\mathfrak{G}} = (\chi\psi)^{\mathfrak{G}}$ liegt im 1-Block. Dann gilt für alle $S \in \mathfrak{S}$:

$$| S^{\mathfrak{G}} | \frac{\eta^{\mathfrak{G}}(S)}{\eta^{\mathfrak{G}}(E)} \equiv | S^{\mathfrak{G}} | \quad (\mathfrak{q}),$$

$$| S^{\mathfrak{G}} | \frac{\eta^{\mathfrak{G}}(S)}{\eta^{\mathfrak{G}}(E)} = (p^f + 1)\, p^f \cdot \frac{\psi(S) + \bar{\psi}(S)}{p^f + 1} = p^f(\psi(S) + \bar{\psi}(S)),$$

$$| S^{\mathfrak{G}} | = (p^f + 1)\, p^f \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Also folgt

$$\psi(S) + \bar{\psi}(S) \in \mathfrak{q}$$
$$\psi(S)\,\{\psi(S) + \bar{\psi}(S)\} \in \mathfrak{q}$$
$$\psi(S)^2 + 1 \in \mathfrak{q}$$
$$\psi(S)^2 \equiv 1 \ (\mathfrak{q})$$
$$\psi(S^2) \equiv 1 \ (\mathfrak{q})$$
$$\psi(S) \equiv 1 \ (\mathfrak{q}), \qquad \text{für alle } S \in \mathfrak{S}$$

d.h. $\widehat{\psi(S} = 1$ für alle $S \in \mathfrak{S}$.

Da aber $\psi(S)$ eine m-te Einheitswurzel ist (mit $2 \nmid m$) und $\sim$ einen Isomorphismus der m-ten Einheitswurzeln von L auf die m-ten Einheitswurzeln von $\tilde{L}$ bewirkt, folgt $\psi(S) = 1$ für alle $S \in \mathfrak{S}$, also $\psi = 1$. Also sind $\{1, \alpha, \gamma_1, \gamma_2, (\chi 1)^{\mathfrak{G}} \mid 1 \neq \chi \neq \lambda\}$ die komplexen irreduziblen Charaktere aus dem 1-Block. Insbesondere enthält der 1-Block genau $3 + 2^{a-2}$ irreduzible komplexe Charaktere. Die Charaktere δ^* liegen in Blöcken vom Defekt 0. Es verbleiben somit noch genau $(1/4)(p^f - 5) - (2^{a-2} - 1) = (1/4)(p^f - 1) - 2^{a-2} = 2^{a-2} \cdot m - 2^{a-2} = 2^{a-1} \cdot (m - 1)/2$ Charaktere $\eta^{\mathfrak{G}}$, die in Blöcken vom Defekt $a - 1$ liegen. Die Charaktere $\{(\chi\psi)^{\mathfrak{G}} \mid \chi \in \hat{\mathfrak{Q}}, 1 \neq \psi \text{ fest}\}$ liegen im selben Block, da sie auf allen $2'$-Elementen übereinstimmen. Es gibt also höchstens $(m - 1)/2$ Blöcke vom Defekt $a - 1$. Wegen [1, Theorem 61.6] bleiben alle $(\chi\psi)^{\mathfrak{G}}$ mit $1 \neq \psi$ bei Konstantenreduktion irreduzibel.

Aus der Unzerlegbarkeit des Ausschnittes der Cartanmatrix zu jedem Block folgt, daß jeder Block vom Defekt $a - 1$ genau einen irreduziblen Brauercharakter enthält. $(\chi\psi)^{\mathfrak{G}}$ und $(\chi'\psi')^{\mathfrak{G}}$ liegen also genau dann im selben Block, wenn sie auf allen $2'$-Elementen übereinstimmen. Seien $(\chi\psi)^{\mathfrak{G}}$ und $(\chi'\psi')^{\mathfrak{G}}$ im selben Block: Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\psi(S) + \bar{\psi}(S) &= \psi'(S) + \bar{\psi}'(S) \\
\psi(S)\{\psi(S) + \bar{\psi}(S)\} &= \psi(S)\{\psi'(S) + \bar{\psi}'(S)\} \\
\psi(S)\bar{\psi}(S^{-1}) + 1 &= \psi(S) \cdot \bar{\psi}'(S^{-1}) + \psi(S)\psi'(S^{-1}), \qquad \text{für alle } S \in \mathfrak{S} \\
(\psi, \bar{\psi})_{\mathfrak{S}} + 1 &= (\psi, \bar{\psi}')_{\mathfrak{S}} + (\psi, \psi')_{\mathfrak{S}}.
\end{aligned}$$

Wegen $(\psi, \bar{\psi})_{\mathfrak{S}} = 0$ gilt $\psi = \bar{\psi}'$ oder $\psi = \psi'$. Daraus folgt, daß es mindestens $(m - 1)/2$ Blöcke vom Defekt $a - 1$ gibt.

Es gibt somit genau $(m - 1)/2$ Blöcke vom Defekt $a - 1$, von denen jeder 2^{a-1} irreduzible komplexe Charaktere und 1 irreduziblen Brauercharakter enthält. Der 1-Block enthält demnach genau 3 irreduzible Brauercharaktere 1, β_1, β_2. Wir wollen nun den Ausschnitt der Zerlegungsmatrix zum 1-Block bestimmen.

Die Gruppe $PSL(2, p^f)$ besitzt eine zweifach–transitive Permutationsdarstellung auf $p^f + 1$ Punkten. Wir machen den L-Vektorraum V der Dimension $n = p^f + 1$ zu einem $L[\mathfrak{G}]$-Modul durch $v_i G = v_{iG}$ wenn $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Sei D die dazugehörige Darstellung. Dann gilt $D = D_0 + D_1$ wobei D_0 die triviale Darstellung ist und D_1 eine andere irreduzible Darstellung. Dabei ist unser Charakter α gerade der Charakter zur Darstellung D_1. Nach der Konstantenreduktion gilt das Entsprechende für einen n-dimensionalen $\tilde{L}$-Vektorraum $\tilde{V}$; $\tilde{V} = \langle \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n \rangle$ $\tilde{v}_i G = \tilde{v}_{iG}$.

Mit [2, V, 20.3] und $2 \mid n$ folgt, daß in der Kompositionsreihe von $\tilde{V}$ zweimal der Modul zur 1-Darstellung vorkommt. Das bedeutet, daß in der Zerlegung von α in irreduzible Brauercharaktere der 1-Charakter vorkommt.

Es gilt $\gamma_1 + \gamma_2 = 1 + \alpha$ auf allen $2'$-Elementen. Wegen $\gamma_{i|\mathfrak{B}} = \rho_{\mathfrak{B}}$ und $\alpha\,|_{\mathfrak{B}} = \rho_{\mathfrak{B}}$ tauchen bei γ_i und α nur die Zerlegungszahlen 0 und 1 auf. Also kommt der 1-Charakter in der Zerlegung von α und γ_i $(i = 1, 2)$ jeweils genau einmal vor. Da γ_1 und γ_2 nicht auf allen $2'$-Elementen übereinstimmen, haben sie verschiedene Zerlegungen. Außerdem gilt für $2'$-Elemente $\gamma_1 + \gamma_2 = (\chi 1)^{\mathfrak{G}}$.

Damit ist die Zerlegungsmatrix bereits bestimmt.

	1	β_1	β_2
1	1	0	0
α	1	1	1
γ_1	1	1	0
γ_2	1	0	1
$\eta^{\mathfrak{G}}$	2	1	1

Für die Grade der irreduziblen Brauercharaktere gilt:

$$\beta_i(E) = (p^f - 1)/2, \qquad (i = 1, 2).$$

(b) Sei $p^f \equiv -1(4)$. Wir setzen $\mathfrak{B} = \mathfrak{Q} \times \mathfrak{S}$ mit $|\,\mathfrak{Q}\,| = 2^{a-1}$ und $|\,\mathfrak{S}\,| = m$, $2 \nmid m$. Dann gilt: Anzahl der $2'$-Klassen, $3 + ((p^f - 3)/4) + (m - 1)/2$; Anzahl der Blöcke vom maximalen Defekt, 1; Anzahl der Blöcke vom Defekt 0, $(1/4)(p^f - 3)$.

Für $\delta \in \hat{\mathfrak{B}}$ setzen wir wieder $\delta = \chi \cdot \psi$ mit $\chi \in \hat{\mathfrak{Q}}$ und $\psi \in \hat{\mathfrak{S}}$. Wie in Teil (a) sieht man mit Hilfe der entsprechenden Kongruenzen, daß $\{1, \alpha, \gamma_1, \gamma_2, (\chi 1)^* \mid 1 \neq \chi \neq \lambda\}$ gerade die sämtlichen irreduziblen komplexen Charaktere aus dem 1-Block sind. Insbesondere enthält dieser genau $3 + 2^{a-2}$ irreduzible komplexe Charaktere.

Die Charaktere $\eta^{\mathfrak{G}}$ liegen in Blöcken vom Defekt 0. Es verbleiben noch $\frac{1}{4}(p^f - 3) - (2^{a-2} - 1) = 2^{a-1} \cdot (m - 1)/2$ Charaktere δ^*, die in Blöcken vom Defekt $a - 1$ liegen. Die Charaktere $\{(\chi\psi)^* \mid \chi \in \hat{\mathfrak{Q}}, 1 \neq \psi \text{ fest}\}$ liegen im selben Block, da sie auf allen $2'$-Elementen übereinstimmen. Es gibt also höchstens $(m - 1)/2$ Blöcke vom Defekt $a - 1$. Wegen [1, Theorem 61.6] bleiben alle $(\chi\psi)^*$ mit $1 \neq \psi$ bei Konstantenreduktion irreduzibel. Aus der Unzerlegbarkeit des Ausschnittes der Cartanmatrix zu jedem Block folgt, daß jeder Block vom Defekt $a - 1$ genau einen irreduziblen Brauercharakter enthält. $(\chi\psi)^*$ und $(\chi'\psi')^*$ liegen also genau dann im selben Block, wenn sie auf allen $2'$-Elementen übereinstimmen. Seien $(\chi\psi)^*$ und $(\chi'\psi')^*$ im selben Block. Wie in (a) folgt, daß dann $\psi = \bar{\psi}'$ oder $\psi = \psi'$ gilt. Daraus folgt, daß es mindestens $(m - 1)/2$ Blöcke vom Defekt $a - 1$ gibt. Es gibt somit genau $(m - 1)/2$ Blöcke vom Defekt $a - 1$, von denen jeder 2^{a-1} irreduzible komplexe Charaktere und 1 irreduziblen Brauercharakter enthält. Der

1-Block besitzt demzufolge genau 3 irreduzible Brauercharaktere 1, β_1, β_2. Wir wollen jetzt den Ausschnitt der Zerlegungsmatrix zum 1-Block bestimmen.

Bemerkung. Sei $p^f \equiv -1(4)$. Dann ist $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ eine Frobeniusgruppe mit $2 \nmid | \mathfrak{P}\mathfrak{U} |$. Die irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ sind: $| \mathfrak{U} | = (p^f - 1)/2$ lineare Charaktere σ_i die $\mathfrak{P}$ im Kern haben.

$$\frac{| \mathfrak{P} | - 1}{| \mathfrak{U} |} = 2 \text{ Charaktere } \tau_i \text{ vom Grad } \frac{p^f - 1}{2}.$$

Sei $1 \neq \beta$ ein irreduzibler Brauercharakter von $PSL(2, p^f)$. $\beta |_{\mathfrak{P}\mathfrak{U}}$ zerfällt in irreduzible Charaktere von $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$. Sei $P \in \mathfrak{P}$. Wegen $P \notin$ Kern β folgt $(\beta |_{\mathfrak{P}\mathfrak{U}}, \tau_i) \neq 0$ für $i = 1$ oder $i = 2$. Wegen $\tau_i(E) = \frac{1}{2}(p^f - 1)$ folgt $\beta(E) \geqslant \frac{1}{2}(p^f - 1)$.

Wie in Teil (a) treten auch hier nur die Zerlegungszahlen 0 und 1 auf. Die Charaktere γ_1 und γ_2 stimmen nicht auf allen $2'$-Elementen überein, haben also verschiedene Zerlegungen. Aus obiger Bemerkung folgt:

$$\gamma_1 = \beta_1 \qquad \text{und} \qquad \gamma_2 = \beta_2 .$$

Für $2'$-Elemente gilt:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \delta^* \qquad \text{und} \qquad 1 + \delta^* = \alpha.$$

Damit ist die Zerlegungsmatrix wieder bestimmt.

	1	β_1	β_2
1	1	0	0
α	1	1	1
γ_1	0	1	0
γ_2	0	0	1
δ^*	0	1	1

Für die Grade der irreduziblen Brauercharaktere gilt:

$$\beta_i(E) = (p^f - 1)/2, \qquad (i = 1, 2).$$

IX. $\mathfrak{G} = PSL(2, p^f)$, $2 \neq q = p$

Um die Frage nach den irreduziblen $\tilde{L}[SL(2, p^f)]$-Moduln zu klären, zitieren wir folgenden Satz (Siehe [4]):

SATZ 9.1. *Sei V_m der $\tilde{L}[SL(2,p^f)]$-Modul der homogenen Polynome in x, y vom Grad m mit $(x^i y^j)G = (a_{11}x + a_{12}y)^i (a_{21}x + a_{22}y)^j$ wenn*

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL(2, p^f).$$

Sei $V_m^{\ \nu}$ ($\nu = 0,\ldots,f-1$) der Modul der homogenen Polynome in x_ν, y_ν vom Grad m mit

$$(x_\nu^{\ i} y_\nu^{\ j})G = (a_{11}^{p^\nu} x_\nu + a_{12}^{p^\nu} y_\nu)^i (a_{21}^{p^\nu} x_\nu + a_{22}^{p^\nu} y_\nu)^j$$

wenn

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL(2, p^f).$$

Dann sind die $V(m_0,\ldots,m_{f-1}) = V_{m_0}^0 \otimes V_{m_1}^1 \otimes \cdots \otimes V_{m_{f-1}}^{f-1}$ mit $m_i \in (0,\ldots,p-1)$ gerade die sämtlichen irreduziblen $\tilde{L}[SL(2,p^f)]$-Moduln.

Die Darstellungen von $PSL(2,p^f)$ sind gerade diejenigen die $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ im Kern haben, also diejenigen, für die $m_0 + m_1 + \cdots + m_{f-1} \equiv 0\,(2)$ gilt.

Wir wollen uns nun die Brauercharaktere zu den Moduln $V(m_0,\ldots,m_{f-1})$ ansehen. Dabei beziehen wir uns zuerst auf die Gruppe $SL(2,p^f)$. Wir interessieren uns für die Einschränkung der Brauercharaktere auf die zyklische Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Ordnung $p^f - 1$ und die zyklische Untergruppe $\mathfrak{V}$ der Ordnung $p^f + 1$. Man überlegt sich leicht folgendes:

Ist $\beta_{m_i}^i$ der Brauercharakter von $V_{m_i}^i$, so gilt

$$\beta_{m_i}^i|_{\mathfrak{U}} = \eta^{m_i p^i} + \eta^{(m_i-2)p^i} + \eta^{(m_i-4)p^i} + \cdots + \eta^{-(m_i-2)p^i} + \eta^{-m_i p^i}$$

mit $\langle\eta\rangle = \hat{\mathfrak{U}}$, und

$$\beta_{m_i}^i|_{\mathfrak{V}} = \delta^{m_i p^i} + \delta^{(m_i-2)p^i} + \cdots + \delta^{-(m_i-2)p^i} + \delta^{-m_i p^i}$$

mit $\langle\delta\rangle = \hat{\mathfrak{V}}$.

Ist $\beta_{m_0,\ldots,m_{f-1}}$ der Brauercharakter von $V(m_0,\ldots,m_{f-1})$ so gilt:

$$\beta_{m_0,\ldots,m_{f-1}} = \prod_{i=0}^{f-1} \beta_{m_i}^i .$$

Sei nun $\sum_{i=0}^{f-1} m_i \equiv O(2)$. Dann können wir $\beta_{m_0,\ldots,m_{f-1}}$ auffassen als Charakter von $PSL(2,p^f)$.

Das heißt, wir können $\beta_{m_0,\ldots,m_{f-1}}|_{\mathfrak{U}}$ bzw.

$\beta_{m_0,\ldots,m_{f-1}}|_{\mathfrak{B}}$ als Charaktere von $\mathfrak{U}/\langle -E\rangle$ bzw. $\mathfrak{U}/\langle -E\rangle$

betrachten.

$$\beta_{m_0,\ldots,m_{f-1}}|_{\mathfrak{U}} = \prod_{i=0}^{f-1} (\eta^{m_i p^i} + \eta^{(m_i-2)p^i} + \cdots + \eta^{-(m_i-2)p^i} + \eta^{-m_i p^i}).$$

Multipliziert man die rechte Seite aus, so treten nur gerade Exponenten auf, also Charaktere aus $\langle \eta^2\rangle$. η^2 ist aber gerade ein erzeugender Charakter von $\widehat{\mathfrak{U}/\langle -E\rangle}$. Bezeichnen wir η^2 aufgefaßt als Charakter von $\mathfrak{U}/\langle -E\rangle$ mit $\bar{\eta}$, so folgt

$$\beta_{m_0,\ldots,m_{f-1}}|_{\mathfrak{U}/\langle -E\rangle}$$
$$= \prod_{i=0}^{f-1} (\bar{\eta}^{(1/2)m_i p^i} + \bar{\eta}^{(1/2)(m_i-2)p^i} + \cdots + \bar{\eta}^{-(1/2)(m_i-2)p^i} + \bar{\eta}^{-(1/2)m_i p^i}). \tag{F1}$$

Entsprechend gilt:

$$\beta_{m_0,\ldots,m_{f-1}}|_{\mathfrak{B}/\langle -E\rangle}$$
$$= \prod_{i=0}^{f-1} (\bar{\delta}^{(1/2)m_i p^i} + \bar{\delta}^{(1/2)(m_i-2)p^i} + \cdots + \bar{\delta}^{-(1/2)(m_i-2)p^i} + \bar{\delta}^{-(1/2)m_i p^i}). \tag{F2}$$

Dabei sind (F1) und (F2) erst nach Ausmultiplizieren der rechten Seiten sinnvoll, da sonst Exponenten auftreten, die nicht in $\mathbb{Z}$ liegen.

Im Folgenden wollen wir nur die $PSL(2, p^f)$ betrachten, und statt $\mathfrak{U}/\langle -E\rangle$, $\mathfrak{B}/\langle -E\rangle$, $\bar{\eta}$ und $\bar{\delta}$ einfach nur $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, η und δ schreiben. Es gilt dann $|\mathfrak{U}| = \frac{1}{2}(p^f - 1)$, $|\mathfrak{B}| = \frac{1}{2}(p^f + 1)$, $\langle\eta\rangle = \hat{\mathfrak{U}}$, $\langle\delta\rangle = \hat{\mathfrak{B}}$. Außerdem wollen wir statt $\eta^{\mathfrak{G}}$ und δ^* genauer $\eta^{j\mathfrak{G}}$ und δ^{j*} schreiben.

Definition 9.2. Sei $\mathfrak{F} = \{I \mid I = (i_1, \ldots, i_f),\ 0 \leqslant i_j \leqslant p-1\}$. Für $I \in \mathfrak{F}$ definieren wir die Mengen

$$\Sigma_f(I) = \left\{ \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{f} \epsilon_j (p - 1 - i_j)\, p^{j-1} \mid \epsilon_j \in \{1, -1\} \right\}$$

$$\Omega_f(I) = \left\{ \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{f} \delta_j (i_j - 2d_j)\, p^{j-1} \mid \delta_j \in \{1, -1\}, 2d_j \leqslant i_j \right\}.$$

Statt $V(i_1,\ldots,i_f)$ schreiben wir V_I und statt $\beta_{i_1,\ldots,i_f}$ schreiben wir β_I mit $I=\{i_1,\ldots,i_f\}$. Den folgenden rein kombinatorischen Hilfssatz geben wir wieder ohne Beweis an.

Hilfssatz 9.3. (a) *Für $i\in\mathbb{Z}$ gilt*

$$\{j\mid j\in\Omega_f(I),\, i\in\Sigma_f(I),\, I\in\mathfrak{F}\}=\{j\mid j\in\mathbb{Z},\, |i|+|j|\leqslant\tfrac{1}{2}(p^f-1)\}.$$

(b) *Für $i\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}-\mathbb{Z}$ gilt*

$$\{j\mid j\in\Omega_f(I),\, i\in\Sigma_f(I),\, I\in\mathfrak{F}\}=\{j\mid j\in\tfrac{1}{2}\mathbb{Z}-\mathbb{Z},\, |i|+|j|\leqslant\tfrac{1}{2}(p^f-1)\}.$$

Hauptsatz 9.4. *Sei $\delta=\{I\mid I\in\mathfrak{F},\sum_{j=1}^{f}i_j\equiv O(2)\}$:*

(a) *Sei $\eta^{j\mathfrak{G}}=\sum_{I\in\delta}d_{jI}\beta_I$ die Zerlegung von $\eta^{j\mathfrak{G}}$ in irreduzible Brauercharaktere so gilt*

$$\begin{aligned} d_{jI}&=1, &&\text{für}\quad \{j,\tfrac{1}{2}(p^f-1)-j\}\cap\Sigma_f(I)\neq\varnothing\\ &=0, &&\text{sonst.}\end{aligned}$$

(b) *Sei $\delta^{j*}=\sum_{I\in\delta}d_{jI}\beta_I$ die Zerlegung von δ^{j*} in irreduzible Brauercharaktere, so gilt*

$$\begin{aligned} d_{jI}&=1, &&\text{für}\quad \{j,\tfrac{1}{2}(p^f+1)-j\}\cap\Sigma_f(I)\neq\varnothing\\ &=0, &&\text{sonst.}\end{aligned}$$

(c) *Sei $p^f\equiv 1(4)$: Sei $\gamma_{1/2}=\sum_{I\in\delta}d_I\beta_I$, so gilt*

$$\begin{aligned} d_I&=1, &&\text{für } \tfrac{1}{4}(p^f-1)\in\Sigma_f(I)\\ &=0, &&\text{sonst.}\end{aligned}$$

(d) *Sei $p^f\equiv -1(4)$: Sei $\gamma_{1/2}=\sum_{I\in\delta}d_I\beta_I$, so gilt*

$$\begin{aligned} d_I&=1, &&\text{für}\quad \tfrac{1}{4}(p^f+1)\in\Sigma_f(I)\\ &=0, &&\text{sonst.}\end{aligned}$$

Beweis. (a) Sei $\mathfrak{M}=\{\beta_I\mid j\in\Sigma_f(I)\}$ und $\mathfrak{N}=\{\beta_I\mid\frac{1}{2}(p^f-1)-j\in\Sigma_f(I)\}$. Zeige, $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}=\varnothing$; Ang. $\beta_I\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}$ mit $I=\{i_1,\ldots,i_f\}$. Dann gilt:

$$j=\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\epsilon_k(p-1-i_k)\,p^{k-1}$$

$$\tfrac{1}{2}(p^f-1)-j=\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\epsilon_k'(p-1-i_k)\,p^{k-1}\,.$$

Sei $J = \{k \mid \epsilon_k = \epsilon_k'\}$. Es folgt:

$$\tfrac{1}{2}(p^f - 1) = \sum_{k \in J} \epsilon_k(p - 1 - i_k)\, p^{k-1}.$$

Sei

$$J_1 := \{k \mid k \in J,\ \epsilon_k = 1\}$$
$$J_2 := \{k \mid k \in J,\ \epsilon_k = -1\}.$$

Mit

$$(1/2)(p^f - 1) = \sum_{k=1}^{f} ((p-1)/2)\, p^{k-1}$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{f} ((p-1)/2)\, p^{k-1} + \sum_{k \in J_2} (p - 1 - i_k)\, p^{k-1} = \sum_{k \in J_1} (p - 1 - i_k)\, p^{k-1}.$$

Gäbe es ein k_0 mit $k_0 \notin J = J_1 \cup J_2$, dann würde links in der p-adischen Entwicklung der Term p^{k_0-1} mit von 0 verschiedenem Faktor auftreten, rechts dagegen nicht. Also gilt $J = \{1, \ldots, f\}$.

Daraus folgt $j = \frac{1}{2}(p^f - 1) - j$. Das stimmt jedoch nicht. Also $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \varnothing$. Wir setzen $\beta_1 = \sum_{\mathfrak{M}} \beta_l$ und $\beta_2 = \sum_{\mathfrak{N}} \beta_l$. Mit Hilfssatz 9.3 folgt nun:

$$\beta_1 \mid_{\mathfrak{B}} = 1 + \eta + \eta^{-1} + \eta^2 + \eta^{-2} + \cdots + \eta^{(1/2)(p^f-1)-j} + \eta^{-((1/2)(p^f-1)-j)}$$
$$\beta_2 \mid_{\mathfrak{B}} = 1 + \eta + \eta^{-1} + \cdots + \eta^j + \eta^{-j}.$$

Also gilt $(\beta_1 + \beta_2) \mid_{\mathfrak{U}} = 2\rho_{\mathfrak{U}} + \eta^j + \eta^{-j}$, wobei $\rho_{\mathfrak{U}}$ der reguläre Charakter von $\mathfrak{U}$ ist. Außerdem gilt

$$\beta_1 \mid_{\mathfrak{B}} = 1 + \delta + \delta^{-1} + \cdots + \delta^{(1/2)(p^f-1)-j} + \delta^{-((1/2)(p^f-1)-j)}$$
$$\beta_2 \mid_{\mathfrak{B}} = 1 + \delta + \delta^{-1} + \cdots + \delta^j + \delta^{-j}.$$

Also $(\beta_1 + \beta_2) \mid_{\mathfrak{B}} = 2\rho_{\mathfrak{B}}$.

Somit stimmt $(\beta_1 + \beta_2)$ auf allen p'-Elementen mit $\eta^{j\mathfrak{G}}$ überein, und Teil (a) ist bewiesen.

Die Beweisteile (b), (c), und (d) verlaufen völlig analog.

Als Beispiel diene die Zerlegungsmatrix der Gruppe $PSL(2, 25)$:

	$\beta_{\{00\}}$	$\beta_{\{02\}}$	$\beta_{\{04\}}$	$\beta_{\{11\}}$	$\beta_{\{13\}}$	$\beta_{\{20\}}$	$\beta_{\{22\}}$	$\beta_{\{24\}}$	$\beta_{\{31\}}$	$\beta_{\{33\}}$	$\beta_{\{40\}}$	$\beta_{\{42\}}$	$\beta_{\{44\}}$
1	1												
$\eta^{1\mathfrak{S}}$					1	1							
$\eta^{2\mathfrak{S}}$			1							1	1		
$\eta^{3\mathfrak{S}}$		1		1		1				1			
$\eta^{4\mathfrak{S}}$	1				1		1		1				
$\eta^{5\mathfrak{S}}$		1							1			1	
$\delta^{1}*$	1				1			1					
$\delta^{2}*$			1			1				1			
$\delta^{3}*$		1								1	1		
$\delta^{4}*$				1	1	1	1						
$\delta^{5}*$	1								1			1	
$\delta^{6}*$		1		1			1		1				
γ_1				1			1						
γ_2				1			1						
α													1

Literaturverzeichnis

1. Larry Dornhoff, "Group Representation Theory," Part B.
2. B. Huppert, "Endliche Gruppen I."
3. Journal of Algebra 3.
4. R. Brauer and Nesbitt, On the modular characters of groups, *Ann. of Math.* **42.**